

# El fenomen de la inducció electromagnètica: de Faraday a Einstein passant per Maxwell

Carme Martín \* i Josep Graells †

Departament de Física Aplicada. UB

## Introducció

Resulta sorprenent com de vegades esdevé difícil de tractar des del punt de vista docent determinats aspectes de certes teories, d'altra banda ben consensuades i de gran aplicació pràctica.

En general aquesta dificultat és un senyal d'alarma que ens alerta que hem entrat en el terreny, bé dels límits de la teoria, bé dels límits entre diferents aproximacions dins de la teoria. Malauradament, hi ha una tendència a menystenir l'existència d'aquests límits, sobretot quan es tracta de teories clàssiques ben allunyades dels temes frontera de la física actual. I aquest oblit comporta una sèrie d'equívocs i errors conceptuals que resultarien incomprensibles des d'un altre punt de vista.

Un exemple paradigmàtic del que acabem d'exposar el constitueix la llei de Faraday de la inducció electromagnètica. N'hi ha prou a fer una ullada a la bibliografia per a comprovar com fins i tot tecnòlegs i científics experimentats han comès errors tant de caire conceptual com tècnic. És més, els autors opinem que alguns d'aquests errors no han estat suficientment explicats en la bibliografia específica, i el que és pitjor, es continuen propagant raonaments i plantejaments si més no deficientes.

Una part de la dificultat rau en el fet que en aquest domini s'ha d'assolir un equilibri delicat entre les vessants pràctica i teòrica, de forma que les dues es reforcin i s'ajudin simultàniament. En concret i a grans trets, s'ha de compatibilitzar l'aproximació de la teoria de circuits (constants localitzades) amb l'aproximació dels estats quasiestacionaris del camp electromagnètic. I tanmateix, quan intervenen circuits en moviment, fins i tot quan les velocitats són tan petites com es vulgui, s'han de tenir en consideració resultats de la relativitat especial per no caure en el terreny de les incongruències.

Per exemple, està tan arrelada la idea que un camp electromagnètic purament electrostàtic, en ser conser-

vatiu, és incapaç de generar corrents *estacionaris*, que quasi ha barrat el camí per a una anàlisi que demostra que sí que ho pot fer, sempre i que el circuit estigui en moviment, com es demostrarà més endavant.

L'objectiu d'aquest article és fer aflorar aquestes dificultats i que l'enfocament adoptat pugui servir d'ajut als alumnes i experts interessats en aquest fenomen que M. Faraday va descobrir el 1831, i A. Einstein va aclarir definitivament en la vessant teòrica el 1905, amb la creació de la relativitat especial.

## El fenomen de la inducció electromagnètica i la llei de Faraday

El descobriment del fenomen de la inducció electromagnètica no va ser qüestió d'un, sinó de molts experiments. El 29 d'agost de 1831, Faraday es va posar a treballar en ferm en les investigacions sobre la producció o "inducció" d'un flux de corrent en un fil metàl·lic o en un altre conductor per l'acció de forces elèctriques o magnètiques externes. En un interval de dos mesos, Faraday va obtenir corrents induïts momentanis, primer a partir de la variació de corrents continus i després a partir del moviment d'ímants. Aquests fenòmens constitueixen la base dels transformadors i dels generadors de corrent continu i altern.

Per a la descripció històrica dels experiments de Faraday ens és grat de recomanar la magnífica monografia de Thomas Martin (Martin, 1991), i les referències que en el text i a peu de pàgina s'hi citen.

Faraday va observar que era possible induir un corrent en un circuit conductor sempre que el flux del camp magnètic variés a través d'una superfície, el contorn de la qual fos el mateix conductor.

Aquest efecte pot aconseguir-se de dues maneres:

- a) Variant el camp magnètic que passa a través del circuit.
- b) Movent el circuit.

En el cas *a)* la causa del corrent induït és el resultat d'un camp elèctric associat al camp magnètic dependent del temps. En el cas *b)* la causa del corrent induït és la força exercida pel camp magnètic sobre les càrregues lliures de l'espina conductora en moviment.

En els dos casos la força per unitat de càrrega in-

\*Carme Martín i Torres (Barcelona, 1950) és doctora en Física per la Universitat de Barcelona (1981) i és professora del col·legi La Salle Gràcia.

†Josep Graells i Casanellas (Cervera, 1946) és doctor en Física per la Universitat de Barcelona (1978) i actualment treballa a la Direcció d'Explotació i Enginyeria de FECSA.

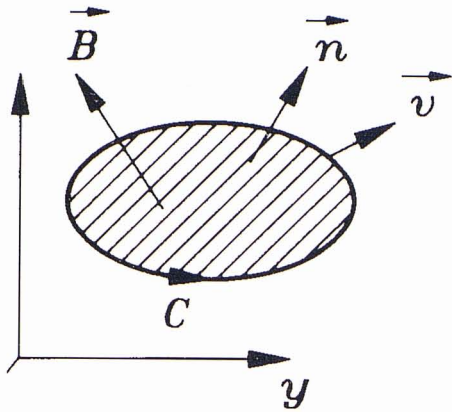


Figura 1: Circuit  $C$  en un referencial  $K$

tegrada al llarg del circuit és proporcional a la variació del flux magnètic a través del circuit. Aquest resultat es coneix com la llei de Faraday (Shadowitz, 1975). Per fixar les idees considerem el circuit  $C$  del dibuix, figura 1. Respecte al referencial inercial  $K$ , el circuit es mou amb una velocitat  $\vec{v}$ . Per tal de fixar el sentit positiu de circulació del corrent induït cal escollir un sentit de circulació en el conductor, llavors els vectors normals a una superfície que el tingui per contorn són definits per la regla de la mà dreta, és a dir, queda fixada la cara positiva de la superfície.

La força que actua sobre cada càrrega  $q$  del conductor és la força de Lorentz:

$$\vec{F}(\vec{r}, t) = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

on  $(\vec{E}(\vec{r}, t), \vec{B}(\vec{r}, t))$  és el camp electromagnètic en el referencial  $K$ , en l'instant  $t$  i en el punt  $\vec{r}$ .

La integral de la força per unitat de càrrega al llarg de tot el circuit, s'anomena força electromotriu (f. e. m.), o també voltatge  $e(t)$  induït:

$$e(t) = \oint_C \frac{1}{q} \vec{F}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{r} = \oint_C d\vec{r} \cdot (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (1)$$

Observem que la integral s'efectua en un mateix instant  $t$  del referencial  $K$ . És a dir, simultàniament a  $K$ . Evidentment la f. e. m. tendirà a provocar un flux de càrregues en el si del conductor. Les dues contribucions de la banda dreta de (1), es corresponen als dos casos *a*) i *b*) abans esmentats. La primera part  $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r}$  (que esdevé independent del moviment del circuit), no pot ser deguda a un camp electrostàtic, atès que en ser aquests conservatius ( $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ ) en resultaria una contribució nul·la a  $e(t)$ . Com a resultat de la circulació, una càrrega que segueixi una trajectòria tancada i estàtica en un camp electrostàtic té la mateixa energia potencial a l'inici que al final; en conseqüència, la càrrega  $q$  no pot rebre ni entregar energia. Per tant, no pot ser la causa de corrents estacionaris en conductors en repòs, per exemple, no podria subministrar l'energia perduda per l'efecte Joule per aquests corrents estacionaris. El

camp  $\vec{E}$  ha de ser, doncs, el resultat d'un potencial vector  $\vec{A}$  dependent del temps,  $\vec{E}(\vec{r}, t) = -\partial\vec{A}/\partial t$ . La segona  $\oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{r}$  és el resultat del moviment ( $\vec{v}$  del circuit). Seguidament analitzem els dos casos.

$$\begin{aligned} e(t; \text{circuit } C \text{ en repòs en } K) &= \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = \\ &= \oint_C -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{r} = -\frac{d}{dt} \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r}. \end{aligned}$$

Aplicant el teorema de Stokes i tenint en compte que  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ , resulta:

$$\begin{aligned} e(t; \text{circuit } C \text{ en repòs en } K) &= \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = \\ &= -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\frac{d\Phi}{dt}, \end{aligned}$$

on  $d\vec{S}$  és el diferencial de la superfície definida pel circuit  $C$ . Atès que  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ ,  $S$  és qualsevol superfície el contorn de la qual és el circuit  $C$ .

Per a la part deguda al moviment s'obté un resultat semblant:

$$\begin{aligned} e(t; \text{circuit } C \text{ en moviment}) &= \oint_C \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{r} = \\ &= -\oint_C (\vec{v} \times d\vec{r}) \cdot \vec{B}, \end{aligned}$$

on  $\vec{v} \times d\vec{r}$  és l'element de superfície que el contorn  $d\vec{r}$  del circuit escombra per unitat de temps. Per tant,  $(\vec{v} \times d\vec{r}) \cdot \vec{B}$  és el flux del camp magnètic a través d'aquesta superfície infinitesimal. En integrar  $(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{r}$  al llarg de  $C$  s'obindrà el flux total tallat pel conductor en el seu desplaçament:

$$e(t; \text{circuit } C \text{ en moviment}) = -\frac{d\Phi(t)}{dt}.$$

Combinant els dos resultats la llei de Faraday s'expressa:

$$e(t) = -\frac{d\Phi(t)}{dt}. \quad (2)$$

La llei de Faraday tal com s'acaba de recordar, a l'equació (2), té bàsicament la seva importància i aplicació estesa en el paper que fa per determinar els corrents induïts en un circuit filiforme, en el qual es pugui aplicar la llei d'Ohm, que en el cas menys complicat, menyspreant efectes capacitius i d'autoinducció, és  $e(t) = i(t)R$  on  $R$  és la resistència òhmica del circuit i  $i(t)$  la intensitat que hi circula. En tot cas, s'han de verificar condicions de quasiestacionarietat, en el sentit que s'han de poder negligir, per exemple, fenòmens associats a la propagació de les magnituds, i, a més a més, els conductors s'han de moure lentament.

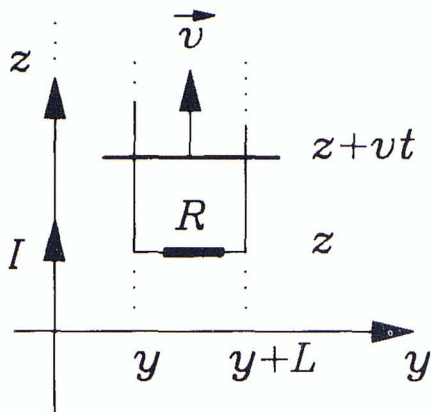


Figura 2: Distribució uniforme i rectilínia de càrrega elèctrica en un referencial  $K$

En el cas més general, en canvi, intervé la densitat del corrent  $\vec{j}$ , en el qual el valor del camp electromagnètic local  $(\vec{E}, \vec{B})$ , que apareix en la definició (1), hi té el paper fonamental. Llavors la f. e. m.  $e(t)$  deixa de tenir utilitat i sentit pràctic i cal recórrer a les equacions de Maxwell per  $(\vec{E}, \vec{B})$  i a les relacions constitutives del medi.

Centrem ara l'atenció en la definició de f. e. m., equació (1), en la qual es basa la llei de Faraday. A continuació s'exposa un exemple clar del tipus d'incongruències a què condueix un raonament deficient, que no té en compte totes les condicions d'aproximació, basat en la mateixa idea aplicada per L.W. Alvarez i col·laboradors el 1970 per construir un detector de monopols magnètics.

En el referencial inercial  $K$  hi ha una distribució uniforme i rectilínia de càrrega elèctrica de densitat  $\lambda$  C/m que es desplaça al llarg del seu eix amb una velocitat constant  $\vec{v}$ . Per tant, en  $K$  es té un corrent de convecció d'intensitat  $I = \lambda v$ . L'eix  $z$  es fa coincidir amb el corrent. En el pla  $(y, z)$  se situa, com indica la figura 2, un quadre conductor de resistència  $R$ , sobre el qual llisca sense fregament, i fa un contacte elèctric perfecte, una barra transversal que es mou amb la mateixa velocitat  $\vec{v} = v\vec{k}$  que la distribució  $\lambda$ . Es tracta de calcular el corrent induït en el referencial  $K$  descrit, i en el referencial  $K'$  respecte al qual la distribució de càrregues i la barra transversal estan en repòs, i el circuit es desplaça amb la velocitat  $\vec{v} = -v\vec{k}$ .  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  és la tríada ortonormalitzada de vectors base cartesianes.

En el referencial  $K$ , el camp electromagnètic  $(\vec{E}, \vec{B})$  que el corrent convectiu  $I = \lambda v$  genera en el pla  $(y, z)$  del circuit és:

$$\vec{E}(0, y, z) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 y} \vec{j}, \quad \vec{B}(0, y, z) = \frac{I\mu_0}{2\pi y} \vec{i}.$$

La f. e. m. induïda en  $t = t_0$ , segons la definició de l'equació (1), és:

$$e(t_0) = - \oint v \frac{I\mu_0}{2\pi y} dy = \mu_0 \frac{\lambda v^2}{2\pi} \ln \frac{L + y_0}{y_0}.$$

S'ha escollit com a sentit de circulació del circuit l'antihorari, llavors  $d\vec{S} = dydz\vec{i}$ . Trivialment l'aplicació de la llei de Faraday proporciona el mateix resultat:

$$\begin{aligned} e(t_0) &= -(d\Phi(t)/dt)_{t=t_0} = - \left( \frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{S} \right)_{t=t_0} = \\ &= \frac{d}{dt} \int \int \frac{\lambda v \mu_0}{2\pi y} dy dz = \mu_0 \frac{\lambda v^2}{2\pi} \ln \frac{L + y_0}{y_0}. \end{aligned}$$

Atès que  $\mu_0\epsilon_0 = 1/c^2$ , aquesta f. e. m. induïx un corrent continu d'intensitat :

$$i(t_0) = \frac{e(t_0)}{R} = \frac{v^2}{c^2} \frac{\lambda}{\lambda\pi\epsilon_0 R} \ln \frac{L + y_0}{y_0},$$

és a dir, una intensitat d'ordre de magnitud  $v^2/c^2$ .

Si el problema que acabem de resoldre en el referencial  $K$ , se soluciona en el referencial  $K'$ , respecte al qual la distribució de càrregues i la barra transversal estan en repòs, s'ha de concloure que no hi ha cap corrent induït. En efecte, en aquest referencial sols hi ha una distribució lineal de càrrega generadora d'un camp electrostàtic, el camp magnètic és zero, per tant  $e(t_0) = 0$ .

Tanmateix, l'existència d'un corrent induït és independent del referencial, i en conseqüència s'ha arribat a un resultat paradoxal: un mateix problema estudiat sota dos punts de vista dona resultats diferents. Evidentment la natura es comporta unívocament, i la forma com ho fa és la correcta. Anticipem que sí que s'indueix un corrent. En l'apartat següent (complementat amb l'apèndix) s'intentarà de resoldre aquesta paradoxa explicitant el mecanisme físic que en el referencial  $K'$  genera el corrent induït: un camp electrostàtic induïx un corrent estacionari en un circuit en moviment. Evidentment, si el circuit està en repòs, el camp electrostàtic no induïx cap corrent. Aquest resultat està directament lligat a la dilatació dels intervals temporals i la relativitat de la simultaneïtat.

## Inferències relativistes de la llei de Faraday i els seus límits d'aplicabilitat

Problemes i paradoxes semblants a les que planteja el problema elemental proposat a la fi de l'apartat anterior, van guiar a A. Einstein en la creació de la relativitat especial. Per exemple, el seu cèlebre article de 1905: "Sobre l'electrodinàmica dels cossos en moviment" (Einstein, 1952), comença amb el paràgraf següent:

"Se sap que l'electrodinàmica maxwelliana (tal com normalment s'entén avui dia), quan s'aplica a cossos en moviment, condueix a asimetries que no semblen ser inherents als fenòmens. Considerem, per exemple, l'acció electrodinàmica recíproca d'un imant i un conductor. El fenomen observable sols depèn aquí del moviment relatiu entre el conductor i l'imant, mentre que el punt de vista normal fa una diferenciació precisa entre els dos casos, ja sigui un o altre cos el que es mogui. Doncs si és

l'imant el que està en moviment i el conductor en repòs, en l'entorn de l'imant sorgeix un camp elèctric, amb una certa energia productora d'un corrent en el conductor. Però si l'imant és estacionari i el conductor en moviment, no sorgeix cap camp elèctric a l'entorn de l'imant. No obstant això, en el conductor s'indueix una f. e. m., a la qual no correspon cap energia per ella mateixa, però que (suposant l'equivalència del moviment relatiu en els dos casos discutits) dóna lloc a corrents elèctrics de la mateixa trajectòria i intensitat que els produïts per les forces elèctriques del primer cas."

Quaranta-set anys després, el 1952, en un simposium que celebrava el centenari del naixement d'A. A. Michelson, Einstein va enviar una comunicació, en un paràgraf de la qual va escriure:

"... el que va conduir-me més o menys directament a la teoria de la relativitat especial va ser la convicció que la f. e. m. aplicada a un cos en moviment en un camp magnètic no era sinó el resultat d'un camp elèctric..."

D'aquests paràgrafs s'infereix que l'estratègia einsteiniana per fer front als problemes de la llei de Faraday consisteix en principi a analitzar-los respecte a un referencial inercial propi del circuit, és a dir, un referencial respecte al qual el circuit està en repòs. Llavors, la força de Lorentz que actua sobre les càrregues del circuit, i la corresponent f. e. m. queda reduïda a:

$$e'(t'; \text{referencial del circuit en repòs}) = \oint \vec{E}' \cdot d\vec{r}' \quad (3)$$

Evidentment, aquest enfocament exigeix conèixer la llei de transformació del camp electromagnètic ( $\vec{E}', \vec{B}'$ ) des del referencial del circuit al referencial laboratori ( $\vec{E}, \vec{B}$ ). O bé solucionar directament les equacions de Maxwell en el referencial del circuit.

Observem que, en l'apartat segon, per formular la llei de Faraday s'ha seguit l'estratègia oposada al punt de vista d'Einstein, que és l'habitual, inclosos alguns autors relativistes. D'aquí que fos necessari preveure els mecanismes a) i b). Tot i això els casos a) i b) obeeixen a la mateixa llei (eq. (2)), fet que assenyalava que són aspectes diferents d'un mateix principi físic.

Aquestes reflexions de caire general condueixen a la necessitat d'una anàlisi de les possibles limitacions inherents a la pròpia definició de f. e. m. Recordem que la f. e. m. aplicada a un circuit s'ha definit en l'equació (1) com la circulació de la força per unitat de càrrega al llarg del circuit en un mateix instant, és a dir, per  $t = t_0$  del referencial laboratori:

$$\begin{aligned} e(t_0) &= \oint \frac{1}{q} \vec{F}(\vec{r}, t_0) \cdot d\vec{r} = \\ &= \oint \left( \vec{E}(\vec{r}, t_0) + \vec{v}(\vec{r}, t_0) \times \vec{B}(\vec{r}, t_0) \right) \cdot d\vec{r}. \end{aligned}$$

Aquesta definició depèn explícitament del referencial inercial  $K$  (laboratori) respecte al qual s'observa el circuit. En efecte:

1) La integral s'efectua en una simultaneïtat  $t = t_0$  de  $K$ , però segons la relativitat especial esdeveniments simultanis en un referencial inercial no tenen per què ser-ho en un altre. Si  $K'$  és un referencial inercial que es mou amb velocitat  $\vec{v}$  respecte a  $K$ , la manca de simultaneïtat entre els dos referencials és de l'ordre  $v^2/c^2$ .

2) La funció integrada, és a dir, la força de Lorentz, és igual a  $d\vec{p}/dt$ , i com que la derivada del moment lineal  $\vec{p}$  s'efectua emprant el temps del referencial  $K$  i no el temps propi de la càrrega (circuit), no es tenen en compte efectes associats a la dilatació dels intervals temporals, que també són de l'ordre  $v^2/c^2$ .

En conseqüència, en no ser  $e(t_0)$  un invariant Lorentz, no és gens estrany que el càlcul de  $e(t_0)$  en diferents referencials inercials proporcioni resultats no coincidents. En síntesi, cal esperar divergències d'ordre  $v^2/c^2$ . Per tant els resultats derivats de la definició de f. e. m., equació (1), perquè siguin coherents obligaran a menysprear corrents induïts d'ordre  $v^2/c^2$ .

Consideracions d'aquest tipus poden semblar d'intèrès exclusivament teòric, però sospitem que poden tenir, per exemple, un interès pràctic evident per als enginyers de telecomunicacions i aeroespacials, en necessitar resoldre problemes de teoria de circuits en cossos en moviment.

Com s'acaba d'exposar, la metodologia que s'infereix de l'enfocament einsteinian consisteix a analitzar el problema de la inducció electromagnètica en el sistema propi del circuit. Per tant, la definició coherent amb aquest enfocament obliga a emprar l'equació (3), i no la (1), és a dir:

$$e'(t'_0, \text{referencial propi del circuit}) = \oint \vec{E}'(\vec{r}', t'_0) \cdot d\vec{r}' \quad (4)$$

Llavors la formulació de la llei de Faraday és:

$$e'(t') = \oint_{C'} \vec{E}' \cdot d\vec{r}' = - \frac{d}{dt'} \int_{S'} \vec{B}' \cdot d\vec{S}' = - \int_{S'} \frac{\partial \vec{B}'}{\partial t'} \cdot d\vec{S}'$$

Amb aquesta metodologia es pot fer abstracció del circuit, és a dir, es pot prescindir del fil conductor i considerar  $C'$  una línia imaginària en l'espai del referencial  $K'$ . En conseqüència, aplicant el teorema de Stokes a la circulació de  $\vec{E}'$  al llarg de  $C'$ , s'obté una de les quatre equacions de Maxwell, que com és lògic, es coneix com la llei de Faraday en forma diferencial

$$\nabla' \times \vec{E}' + \frac{\partial \vec{B}'}{\partial t'} = 0$$

La força que actua sobre la càrrega en repòs en  $K'$  és  $\vec{F}' = q\vec{E}'$ , en ser  $\vec{v} = \vec{0}$ .

En qualsevol altre referencial  $K$ , i tenint en compte que les equacions de Maxwell són relativísticament invariants, s'obté:

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}, \quad \vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

El terme  $\vec{v} \times \vec{B}$  és el que explica la f. e. m. induïda deguda al moviment del circuit  $C$  en  $K$ . Aquestes dues equacions sempre és convenient de tenir-les presents, ja que descriuen la física bàsica dels fenòmens relacionats amb la inducció, sobretot en els problemes amb contactes lliscants, o bé quan el material del circuit no sigui, per exemple, filiforme. En aquests casos esdevé problemàtic, si no impossible, aplicar la llei de Faraday  $e(t) = -d\Phi/dt$ , en no quedar definit el flux del camp magnètic.

L'enfocament einsteinià adoptat pressuposa que la f. e. m. és un invariant lorentzià, com en mecànica ho és la massa (pròpia) de les partícules. Aquesta suposició és tècnicament raonable atès que els generadors de f. e. m. connectats a un circuit hi són solidaris. La natura escalar de  $e'(t')$  queda explicitada si s'empra la notació tensorial, atès que si  $u^\alpha$  és la quadrivelocitat del circuit i  $F_{\alpha\beta}$  el tensor camp electromagnètic, llavors l'equació (3) o bé (A1) de l'apèndix s'expressen:

$$e'(t') = \oint F_{\alpha\beta} u^\alpha dx^\beta. \quad (5)$$

A partir de l'expressió (A1) de f. e. m. es dedueix immediatament el resultat que s'ha anticipat en l'apartat segon: Un camp purament electrostàtic ( $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ ,  $\vec{B} = 0$ ) induïx un corrent estacionari en un circuit sempre i que aquest estigui en moviment. Si està en repòs, la f. e. m. és zero i en conseqüència no hi ha cap corrent induït. En efecte, tal com es dedueix en l'apèndix:

$$e'(t') = \oint \left( \frac{1}{\gamma} \vec{E}_\parallel \cdot d\vec{r}_\parallel + \gamma \vec{E}_\perp \cdot d\vec{r}_\perp \right) \neq 0 \quad (6)$$

si el circuit està en repòs  $\vec{v} = \vec{0}$ ,  $\gamma = 1$

$$\begin{aligned} e'(t') &= \oint \vec{E}_\parallel \cdot d\vec{r}_\parallel + \vec{E}_\perp \cdot d\vec{r}_\perp = \\ &= \oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = \oint \vec{\nabla}V \cdot d\vec{r} = 0. \end{aligned}$$

Aquest resultat elimina totalment la paradoxa plantejada en el problema de l'apartat anterior, el resultat del qual, efectuant la integració indicada en (4) o (5) és, en els referencials  $K$  i  $K'$ , el següent :

$$i(t) = \frac{v^2}{c^2} \frac{1}{2R} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{L + y_0}{y_0},$$

és a dir, la meitat del resultat obtingut abans. S'ha de tenir en compte que les densitats de càrrega en  $K$  i  $K'$  estan relacionades per  $\lambda = \gamma\lambda_0$  i s'ha suposat que les propietats elèctriques del medi ( $R$ ) no varien en passar de  $K'$  a  $K$ .

## El potencial vector i la llei de Faraday

Atès que la interacció electromagnètica s'introdueix en les equacions de la mecànica quàntica a través dels potencials ( $V, \vec{A}$ ), aquests esdevenen les magnituds físiques

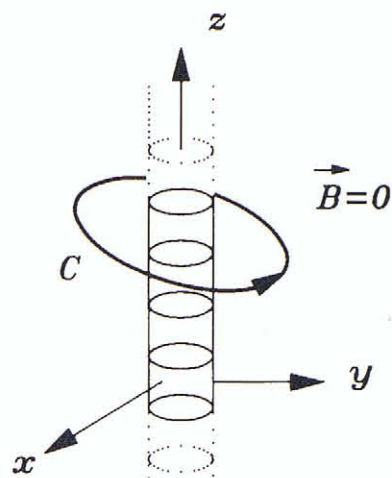


Figura 3: Solenoide indefinit de radi  $a$

bàsiques, i són a les que es dona un sentit físic directe (experiment de Bohm-Aharonov, etc.). En canvi, en el món no quàntic continua perseverant el punt de vista segons el qual és el camp ( $\vec{E}, \vec{B}$ ) el que té un sentit físic immediat, i resta per als potencials ( $V, \vec{A}$ ) un paper secundari, essencialment matemàtic. Tanmateix, de la llei de Faraday es pot fàcilment inferir que fins i tot en el domini clàssic és necessari, en alguns casos, usar directament els potencials, i el camp ( $\vec{E}, \vec{B}$ ) passa a tenir un paper secundari. L'exemple següent ajudarà a concretar el que s'acaba d'exposar.

Considerem un solenoide molt llarg comparat amb el seu diàmetre. El camp magnètic generat per un corrent que passa pel solenoide està confinat dins del solenoide, i és pràcticament zero fora d'ell. Per simplificar, suposarem el cas ideal d'un solenoide infinitament llarg, de radi  $a$ . Escollirem l'eix  $z$  del referencial inercial en què el solenoide està en repòs, coincidint amb l'eix del solenoide. Si aquest té  $n$  espires per metre i circula una intensitat  $I(t)$  que depèn del temps, l'aproximació dels estats quasiestacionaris condueix al camp magnètic següent:

$$\vec{B}(\rho < a) = \mu_0 n I(t) \vec{k} \quad (\text{dins del solenoide}),$$

$$\vec{B}(\rho > a) = \vec{0} \quad (\text{fora del solenoide}).$$

Si una espira conductora  $C$  concatena per fora el solenoide, vegeu la figura 3, s'hi induïx la f. e. m.:

$$e(t) = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{S}.$$

Ja que en tots els punts de l'espira és  $\vec{B} = \vec{0}$ , resulta difícil d'interpretar físicament com pot induir-se en l'espira un corrent per subministrar potència a una càrrega. En aquest cas esdevé més directe formular la llei de Faraday amb el potencial vector  $\vec{A}$ , ja que com que  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ , en aplicar el teorema de Stokes s'obté

$$e(t) = -\frac{d}{dt} \oint \vec{A} \cdot d\vec{r}.$$

Emprant coordenades cilíndriques  $(\rho, \varphi, z)$ , fàcilment es pot calcular un potencial vector  $\vec{A}$ , tal que  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$  en tot l'espai:

$$\rho < a, \quad \vec{A}(\rho, t) = \frac{1}{2} \mu_0 n I(t) \rho \vec{u}_\varphi$$

$$\rho > a, \quad \vec{A}(\rho, t) = \frac{1}{2} \mu_0 n I(t) \frac{a^2}{\rho} \vec{u}_\varphi.$$

Evidentment, no hi ha cap transformació de galga que permeti anul·lar  $\vec{A}$  en la regió  $\rho > a$ , el fet que  $\Phi = \oint \vec{A} \cdot d\vec{r} = \pi a^2 \mu_0 n I(t) \neq 0$  ho impedeix. Llavors la f. e. m. induïda en  $C$  és:

$$e(t) = -\pi a^2 \mu_0 n \frac{dI(t)}{dt}.$$

El que s'acaba d'exposar condueix a preguntar-se: quin és el mecanisme físic que descriu el potencial vector  $\vec{A}$  i que queda emmascarat quan s'usen els camps  $\vec{E}$  i  $\vec{B}$ ? La resposta es troba expressant l'equació de moviment d'una partícula carregada  $q$ , amb els potencials  $(V, \vec{A})$  de  $(\vec{E}, \vec{B})$ :

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v} + q\vec{A}) = -q\nabla(V - \vec{v} \cdot \vec{A})$$

on  $p(\vec{r}_q, t) = m\vec{v} + q\vec{A}$  és el moment canònic conjugat de la partícula en el camp electromagnètic. Llavors queda clar que de la mateixa manera que  $qV$  és l'energia potencial de la partícula en el camp,  $q\vec{A}$  és el moment que el camp transfereix a la partícula. És a dir, mentre que  $(\vec{E}, \vec{B})$  descriu el camp utilitzant les forces que exerceix sobre una partícula,  $(V, \vec{A})$  descriu el camp emprant l'energia i el moment que pot transferir a la partícula.

Atès que la llei de Faraday té més caire energètic que no pas de forces, no és estrany que faci aflorar aquest aspecte del camp electromagnètic.

## Conclusions

És un fenomen prou conegut i explicat en tots els textos d'electromagnetisme que un camp magnetostàtic pot induir un corrent *estacionari* en un circuit en moviment. El present article posa en relleu un fenomen paral·lel: la inducció d'un corrent estacionari en un circuit en moviment mitjançant un camp electrostàtic.

Aquest fenomen no és tractat en els textos o monografies tècniques, tal vegada perquè és un fenomen purament relativista, d'ordre  $v^2/c^2$ . Però oblidar-lo, condueix, fins i tot quan les velocitats són petites comparades amb la de la llum ( $v^2/c^2 \ll 1$ ), a paradoxes com les desenvolupades en el context de l'article. Aquestes paradoxes només poden ser evitades tenint en compte els resultats de la relativitat especial.

## Apèndix

Tornem a centrar l'atenció en la definició (3) de f. e. m. Aquesta definició implica el referencial  $K'$  respecte

al qual el circuit està en repòs. Si  $K'$  es mou amb la velocitat  $\vec{v}$  respecte al referencial  $K$ , llavors les lleis de transformació de Lorentz per a les coordenades i les corresponents per al camp electromagnètic permeten de relacionar els dos referencials. En notació trivectorial les transformacions de Lorentz són:

$$dt' = \gamma(dt - \frac{\vec{v}}{c^2} \cdot d\vec{r}),$$

$$d\vec{r}'_{\parallel} = \gamma(d\vec{r}_{\parallel} - \vec{v}dt), \quad d\vec{r}'_{\perp} = d\vec{r}_{\perp}$$

i les corresponents per al camp electromagnètic  $(\vec{E}', \vec{B}')$  són:

$$\vec{E}'_{\parallel} = \vec{E}_{\parallel}, \quad \vec{E}'_{\perp} = \gamma(\vec{E}_{\perp} + \vec{v} \times \vec{B}),$$

$$\vec{B}'_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel}, \quad \vec{B}'_{\perp} = \gamma\left(\vec{B}_{\perp} - \frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E}\right),$$

on  $\parallel$  i  $\perp$  es refereixen respectivament als components paral·lel i perpendicular a  $\vec{v}$ , i  $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ .

Aquestes lleis de transformació permetran de transformar l'integrand  $\vec{E}' \cdot d\vec{r}'$  utilitzant les magnituds mesurades en el referencial  $K$ . Però abans de substituir-les, s'ha de tenir en compte que la integral, per definició, s'efectua a  $t' = \text{constant}$ , és a dir,  $dt' = 0$ , cosa que implica que en  $K$   $dt = \vec{v}/c^2 \cdot d\vec{r}$ . En conseqüència fàcilment es dedueix:

$$d\vec{r}' = \frac{1}{\gamma} d\vec{r}_{\parallel} + d\vec{r}_{\perp},$$

$$\begin{aligned} \vec{E}' \cdot d\vec{r}' &= \frac{1}{\gamma} \vec{E}_{\parallel} \cdot d\vec{r}_{\parallel} + \gamma(\vec{E}_{\perp} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{r}_{\perp} = \\ &= \left( \frac{v^2}{c^2} \gamma^{-1} \vec{E}_{\parallel} + \gamma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \right) \cdot d\vec{r}. \end{aligned}$$

Substituint en la definició de  $e'(t')$ , equació (3), s'obté:

$$e'(t') = \oint_{c'} \left( \frac{v}{c^2} \gamma^{-1} \vec{E} \cdot \vec{v} + \gamma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \right) \cdot d\vec{r}. \quad (A1)$$

Si es menyspreen efectes d'ordre  $v^2/c^2$ , és a dir si  $\gamma = 1$ , es recupera la definició de f. e. m., equació (1):

$$e'(t') = \oint (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{r} = e(t).$$

## Referències

- EINSTEIN, A. et al., *The principle of relativity*, "On the electrodynamics of moving bodies", pàg. 37-65, Dover (1952).  
 MARTIN, T., *Faraday i el descobriment de la inducció electromagnètica*, edició a cura de Manuel Garcia Doncel. Estudis Universitaris de Vic, Eumo Editorial (1991).  
 SHADOWITZ, A., *The electromagnetic field*, McGraw-Hill (1975).